GABARITO QUESTÕES DISSERTATIVAS – MATEMÁTICA

Questão dissertativa 1

Observamos que para cada uma das questões dissertativas há mais de uma resolução. Na questão dissertativa 1, a resposta à tarefa de listar os conteúdos envolvidos na resolução dependerá do tipo de resolução que o candidato escolher.

QUESTÃO DISSERTATIVA 1

A escola em que você trabalha vai fazer um caderno de exercícios para alunos do Ensino Médio. Você ficou responsável por elaborar a resolução do seguinte problema:

Três atletas A, B e C competem aos pares em uma mesma pista. A vence B por uma distância de 30 metros; B vence C por uma distância de 15 metros e A vence C por uma distância de 42 metros. Cada atleta corre com a mesma velocidade nas duas corridas que faz. Qual é o comprimento da pista?

Você deverá detalhar e explicitar cada um dos passos utilizados na resolução, para que os alunos sejam capazes de compreender e utilizar a mesma estratégia em outros problemas. Ao final, você deverá listar os conteúdos envolvidos na resolução.

RESOLUÇÃO 1

Denominamos d o comprimento em metros da pista e t_{A} o tempo gasto por A para percorrê-la. Tomaremos t_{A} como nossa unidade de tempo, como mostra o quadro a seguir:

Atleta	Tempo	Distância percorrida
A	t_{A}	d
B	t_{A}	$d-30$
C	t_{A}	$d-42$

Como a velocidade dos atletas é a mesma nas duas corridas, vamos calcular tempo e distância que cada atleta percorre. Observe que, como tomamos t_{A} como unidade de medida, vamos considerar $t_{\mathrm{A}}=1\,u.t.$ (uma unidade de tempo)

Se no tempo $t_{\mathrm{A}}=1\,u.t.$ B corre $d-30$ metros, no tempo x B correria d metros; logo, o tempo que B levaria para percorrer a pista toda é $x=\dfrac{d}{d-30}$ $u.t.$ (use uma regra de três!)

Considerando a corrida de C com A, no tempo $t_{\mathrm{A}}=1\,u.t.$ C corre $d-42$ metros. Então, no tempo $x=\dfrac{d}{d-30}$ $u.t.$ (tempo de B para percorrer a pista toda), C correria $y=\dfrac{d(d-42)}{d-30}$ metros.

Por outro lado, considerando a corrida de B com C, no mesmo tempo $x=\dfrac{d}{d-30}$ $u.t.$ C corre $d-15$ metros, que deve ser igual à distância $y=\dfrac{d(d-42)}{30}$. Assim,

$$d-15=\frac{d(d-42)}{d-30}$$

$$(d-15)(d-30)=d(d-42)$$

$$d^2-45d+450=d^2-42d$$

$$3d=450$$

$$d=150$$

Resposta. O comprimento da pista é de 150 metros.

<u>Conteúdos envolvidos na Resolução 1</u>: Proporcionalidade, equações.

RESOLUÇÃO 2

Considerações:

- Em cada corrida, o tempo de ambos os atletas é o mesmo, pois a prova termina no momento em que um dos atletas chega ao final da pista.
- A velocidade média, $v = \frac{d}{t}$, de cada atleta é a mesma para ambas as corridas. Denominamos, então, v_A, v_B, v_C, as velocidades dos atletas A, B e C, respectivamente.
- A distância percorrida pelo atleta A é o comprimento da pista, que denominamos p.

Analisemos cada corrida:

1ª corrida, entre os atletas A e B

Denominamos: $t_{1,}$ o tempo dessa corrida, que é igual para os atletas A e B;

$p,$ a distância percorrida por A;

$d_B = p - 30$, a distância percorrida por B nessa corrida.

Assim, $v_A = \frac{p}{t_1} \Rightarrow t_1 = \frac{p}{v_A}$ e $v_B = \frac{p-30}{t_1} \Rightarrow t_1 = \frac{p-30}{v_B}$

Pela igualdade de t_1, temos $\frac{p}{v_A} = \frac{p-30}{v_B}$. (I)

2ª corrida, entre os atletas B e C

Denominamos: t_2, o tempo dessa corrida, que é igual para os atletas B e C;

$d_{B2} = p$, a distância percorrida por B nessa corrida, que é o comprimento p da pista;

$d_C = d_{B2} - 15 = p - 15$, a distância percorrida por C nessa corrida.

Assim, $v_B = \frac{p}{t_2} \Rightarrow t_2 = \frac{p}{v_B}$ e $v_C = \frac{p-15}{t_2} \Rightarrow t_2 = \frac{p-15}{v_C}$

Pela igualdade de t_2, temos $\frac{p}{v_B} = \frac{p-15}{v_C}$. (II)

3ª corrida, entre os atletas A e C

Denominamos:

$t_3 = t_{1,}$ o tempo dessa corrida, que é igual para os atletas A e C, e que é também igual ao tempo do atleta A na corrida 1 (mesma velocidade e mesma distância);

$p,$ a distância percorrida por A nessa corrida, que é o comprimento p da pista;

$d_C = p - 42$, a distância percorrida por C nessa corrida.

Assim, $v_A = \frac{p}{t_1} \Rightarrow t_1 = \frac{p}{v_A}$ e $v_C = \frac{p-42}{t_1} \Rightarrow t_1 = \frac{p-42}{v_C}$

Pela igualdade de t_1, temos $\frac{p}{v_A} = \frac{p-42}{v_C}$. (III)

Analisemos agora as igualdades possíveis entre (I), (II) e (III).

Da igualdade de (I) e (III), por $\frac{p}{v_A}$ temos: $\frac{p-30}{v_B} = \frac{p-42}{v_C} \Rightarrow \frac{v_C}{v_B} = \frac{p-42}{p-30}$. (IV)

Da igualdade de (II) e (IV), por $\frac{v_C}{v_B}$, pois em (II) $\frac{p}{v_B} = \frac{p-15}{v_C} \Rightarrow \frac{v_C}{v_B} = \frac{p-15}{p}$, temos: $\frac{p-15}{p} = \frac{p-42}{p-30}$.

A partir desta última igualdade, teremos:

$$p(p-42) = (p-30)(p-15)$$
$$p^2 - 42p = p^2 - 45p + 450$$
$$3p = 450$$
$$p = 150$$

Resposta. O comprimento da pista é de 150 metros.

<u>Conteúdos envolvidos na Resolução 2</u>: *Velocidade média, equações.*

RESOLUÇÃO 3

Considerações:

Em cada corrida, o tempo de ambos os atletas é o mesmo, pois a prova termina no momento em que um dos atletas chega ao final da pista.

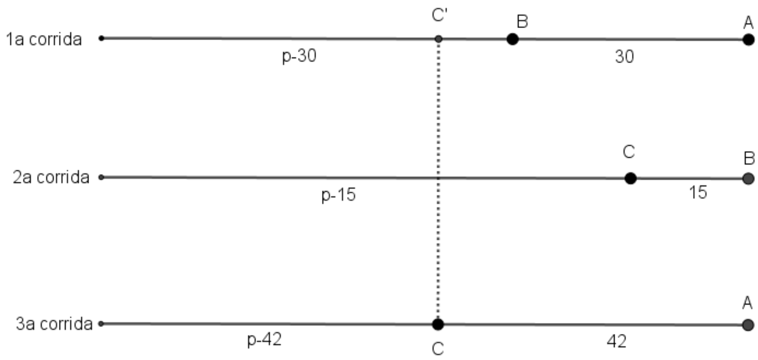
Tomemos como exemplo a corrida entre os atletas B e C, sendo v_B e v_C suas velocidades e d_B e d_C as distâncias percorridas por eles, em um mesmo tempo t. Assim, como $t = \frac{d}{v}$, temos:

$$t = \frac{d_B}{v_B} = \frac{d_C}{v_C} \Rightarrow \frac{d_B}{d_C} = \frac{v_B}{v_C}$$

Portanto, a razão entre as distâncias percorridas por dois atletas é igual à razão entre as suas respectivas velocidades.

Como cada atleta corre com a mesma velocidade nas duas corridas, a razão entre as velocidades de dois atletas é constante, ou seja, há proporcionalidade entre as velocidades e as distâncias percorridas por cada dupla de atletas.

No esquema abaixo, representamos cada corrida por um segmento de comprimento p igual ao comprimento total da pista e as razões podem ser tomadas como razões entre segmentos.



A razão entre as distâncias percorridas por B e C na 2ª corrida é dada por $\frac{d_B}{d_C} = \frac{p}{p-15}$.

A razão entre as distâncias percorridas por B na 1ª corrida e por C na 3ª corrida também é constante e é dada por $\frac{d_B}{d_C} = \frac{p-30}{p-42}$.

Portanto, $\frac{p}{p-15} = \frac{p-30}{p-42}$ e $p(p-42) = (p-15)(p-30)$

$$p^2 - 42p = p^2 - 45p + 450$$
$$3p = 450$$

$$p = 150$$

Resposta. O comprimento da pista é de 150 metros.

Obs. A razão entre as distâncias pode ser expressa de outras formas, como por exemplo, na razão entre o total percorrido por B na 2ª corrida e na 1ª corrida e na razão entre a diferença das distâncias de B e C na 2ª corrida e sua diferença nas corridas 1 e 3.

$$\frac{d_{B2}}{d_{B1}} = \frac{d_{B2} - d_{C2}}{d_{B1} - d_{C3}}$$

$$\frac{p}{p - 30} = \frac{15}{12}$$

$$15(p - 30) = 12p$$

$$15p - 450 = 12p$$

$$3p = 450$$

$$p = 150$$

Resposta. O comprimento da pista é de 150 metros.

<u>Conteúdos envolvidos na Resolução 3</u>: Razão entre grandezas, proporcionalidade entre duas grandezas, proporcionalidade entre segmentos, equações.

Questão dissertativa 2

Na Matemática, um único contraexemplo é suficiente para assegurar que uma sentença não seja válida. Todas as sentenças a seguir são incorretas. Para cada uma delas, dê um contraexemplo, observando a coerência e empregando uma linguagem clara e adequada.

1) Se o algarismo das unidades do produto de dois números naturais é 9, então pelo menos um dos fatores é múltiplo de 3.

Para $17 \times 7 = 119$*, temos que nenhum dos fatores é múltiplo de 3.*

2) O determinante da soma de duas matrizes quadradas é a soma dos determinantes de cada uma dessas matrizes.

Para as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ *e* $A + B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, *temos que* $\det A = 0$, $\det B = 1$ *e* $\det(A + B) = 0 \neq \det A + \det B$.

3) Se A, B, C, D são números reais tais que A < B e C < D, então A – C < B – D.

Para $\mathrm{A} = -5, \mathrm{B} = 2, \mathrm{C} = -12$ e $\mathrm{D} = 1$, *temos* $-5 < 2$, $-12 < 1$ *e* $-5 - (-12) = 7$, *que não é menor do que* $2 - 1 = 1$.

4) Se *a*, *b* e *c* são números naturais e *a* é divisor de *bc*, então *a* é divisor de *b* ou *a* é divisor de *c*.

Para a = 4 e b = 9, temos que 6 é divisor do produto 36 mas não é divisor nem de 4 e nem de 9.

5) Sejam P(*x*) e Q(*x*) dois polinômios com coeficientes reais. Se P e Q têm as mesmas raízes, então P = Q.

Os polinômios $P(x) = x^2 - 5x + 6$ *e* $Q(x) = 2x^2 - 10x + 12$ *têm as mesmas raízes 2 e 3 mas são diferentes pois seus coeficientes correspondentes são diferentes.*

$P(2) = 2^2 - (5 \times 2) + 6 = 0$, $P(3) = 3^2 - (5 \times 3) + 6 = 0$ *e* $Q(2) = 2 \times 2^2 - (10 \times 2) + 12 = 0$, $Q(3) = 2 \times 3^2 - (10 \times 3) + 12 = 0$.

6) Toda função ímpar é injetora.

A função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *dada por* $f(x)=\operatorname{sen}x$ *é uma função ímpar, pois para todo* $x\in\mathbb{R}$ *tem-se:* $f(-x)=\operatorname{sen}(-x)=\operatorname{sen}(0-x)=\operatorname{sen}0\cos x-\operatorname{sen}x\cos 0=0\cdot\cos x-\operatorname{sen}x\cdot 1=-\operatorname{sen}x=-f(x)$. *Por outro lado, a função seno não é injetora, pois* $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}=f\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ *e* $\frac{\pi}{4}\neq\frac{3\pi}{4}$.

7) Se $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ e $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ são funções bijetoras, então $g\circ f=f\circ g$.

Considere as funções $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *e* $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *definidas respectivamente por* $f(x)=2x+1$ *e* $g(x)=x-1$. *Tanto* f *como* g *são funções bijetoras, pois são funções afins.*

Então: $(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(x-1)=2(x-1)+1=2x-1$ *e*
$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(2x+1)=(2x+1)-1=2x$ *e* $f\circ g\neq g\circ f$.

8) A equação $x+y+xy=48$ não tem solução inteira.

$$\begin{aligned}
&x+y+xy=48\\
&x(1+y)+y=48\\
&x(y+1)+y+1=48+1\\
&x(y+1)+(y+1)=49\\
&(x+1)(y+1)=49
\end{aligned}$$

O membro da esquerda é então uma fatoração do 49, ou seja, pode ser $1\times 49,\ 49\times 1,\ 7\times 7$ *com fatores positivos ou* $(-1)\times(-49),\ (-49)\times(-1),\ (-7)\times(-7)$ *com fatores negativos. Uma das soluções é* $x+1=7$ *e* $y+1=7$, *o que nos dá o par* $(6,6)$ *como uma solução inteira. De fato, para* $x=y=6$, *temos* $x+y+xy=6+6+6\times 6=12+36=48$.

9) Sejam A, B, C matrizes quadradas de mesma ordem, diferentes da matriz nula. Se AC = BC, então A = B.

Para as matrizes $A=\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}-1&2\\3&1\end{bmatrix}$ *e* $C=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}$, *diferentes da matriz nula, temos*

$AC=\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&0\\1&0\end{bmatrix}$, $BC=\begin{bmatrix}-1&2\\3&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&0\\1&0\end{bmatrix}$, $AC=BC$ *e* $A\neq B$.

10) O produto de dois números irracionais é um número irracional.

Para os números irracionais não nulos $\sqrt{2}$ *e* $\sqrt{2}$, *temos* $\sqrt{2}\times\sqrt{2}=2\in\mathbb{Q}$.

Prova de que $\sqrt{2}$ *é irracional:*

Suponhamos que $\sqrt{2}=\frac{a}{b}$, *com* a,b *inteiros e* $b\neq 0$, $\frac{a}{b}$ *irredutível (ou* $\operatorname{mdc}(a,b)=1$*). Então:*

$2b^2=a^2\Rightarrow 2\,|\,a^2\Rightarrow 2\,|\,a$ *(pois 2 é primo). Então existe* $x\in\mathbb{Z}$ *tal que* $a=2x$. *Substituindo, temos:*

$2b^2=(2x)^2\Rightarrow 2b^2=4x^2\Rightarrow b^2=2x^2\Rightarrow 2\,|\,b^2\Rightarrow 2\,|\,b$. *Isso é uma contradição, pois* $2\,|\,a$, $2\,|\,b$ e $\operatorname{mdc}(a,b)=1$. *Logo,* $\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$.

11) Se o algarismo das unidades do produto de dois números naturais é 1, então o algarismo das unidades dos fatores é 1.

O produto $9\times 19=171$ *tem o algarismo das unidades igual a 1 e seus fatores são 9 e 19.*

12) n^4+1 **é um número primo para todo número natural** n **,** $n \geq 1$ **.**

Para $n=3$, *temos* $3^4+1=81+1=82$, *que não é primo, pois* $82=2\times 41$.

13) Se as diagonais de um quadrilátero se interceptam em ângulo reto, então o quadrilátero é um quadrado.

O losango tem suas diagonais interceptando-se em ângulo reto e ele não é um quadrado.

14) A equação $3x-10y=15$ **não tem solução inteira.**

A solução é um par (x,y) *de números inteiros. Fazendo* $x=\dfrac{15+10y}{3}$, *vemos que existe uma infinidade de valores* y *que satisfazem essa relação; de fato, qualquer múltiplo de 3 (positivo ou negativo) torna a igualdade verdadeira, uma vez que 15 é múltiplo de 3. Para valores positivos, y pode ser 0, 3, 6, 9, ... Para* $y=0$, $x=5$, *temos:*

$3\times 5-10\times 0=15$. *O par* $(5,0)$ *é solução da equação* $3x-10y=15$.

15) Sejam A e B matrizes quadradas de mesma ordem e U a matriz nula. Se AB = U, então A = U ou B = U.

Para as matrizes $U=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$, $A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{bmatrix}$, *temos:*

$AB=\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ *e* $A\neq U$, $B\neq U$.

16) Se A é um número inteiro e diferente de zero, então $-\mathrm{A}$ **é um número negativo.**

Para $\mathrm{A}=-2$, *temos* $-\mathrm{A}=-(-2)=2$, *que é um número positivo.*

17) Todo polinômio de grau par tem raízes complexas.

O polinômio $P(x)=x^2-1$ *tem grau dois e suas duas raízes são os números reais 1 e* -1.

18) Se $a_1,a_2,a_3,...,a_n$ **e** $b_1,b_2,b_3,...,b_n$ **são duas progressões aritméticas, definimos o produto dessas duas progressões como a sequência** $a_1b_1,a_2b_2,a_3b_3,...,a_nb_n$ **. Então o produto de duas progressões aritméticas crescentes também é uma progressão aritmética.**

Considere a progressão crescente dos números pares (2, 4, 6, 8, ...) e a progressão crescente dos números ímpares (1, 3, 5, 7, ...). O produto dessas progressões é a sequência (2, 12, 30, 56, ...), que não é uma progressão aritmética, pois $30-12\neq 56-30$.

19) O quadrado de um número complexo é sempre um número real.

Para $z=1+i$, *temos* $z^2=(1+i)^2=1-2i+i^2=1-2i-1=2i$, *que não é um número real.*

20) Para quaisquer a **e** b **números reais positivos, tem-se** $\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2>\dfrac{a^2+b^2}{2}$**.**

Para $a=1$ *e* $b=2$, *temos* $\left(\dfrac{1+2}{2}\right)^2=\dfrac{9}{4}$, $\dfrac{1^2+2^2}{2}=\dfrac{5}{2}=\dfrac{10}{4}$ *e* $\dfrac{10}{4}>\dfrac{9}{4}$.